202 Séries à termes positifs. Applications. | Séries de Bertrand | Monier, Capes, Gourdon.

On supposera connues les généralités sur les séries, et la série géométrique (1).

I. Généralités (Monier).

Def.1: Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite "à termes positifs" ssi $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R}_+$. (2)

Prop.1: Une série à termes positifs converge ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est majorée. (3)

Une série à termes positifs divergente tend nécessairement vers $+\infty$.

II. Théorèmes de comparaison (Monier).

Prop.2: **Majoration.** Soient deux séries à termes positifs, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq u_n \leq v_n$ et si $\sum_{n\geq 0} v_n$ cv, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge aussi.(4)

On obtient un critère de divergence par contraposition.

Exple 1: **La série harmonique** $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge (5)

Application: **Règle de Cauchy** : Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes ds $\mathbb{R}_+$. Supp. qu'il existe $\ell\in[0;+\infty[$ tq. $\sqrt[n]{u_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\ell$. On a:

$$\begin{cases}\text{Si } \ell<1, \text{ alors } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge.}\\ \text{Si } \ell>1, \text{ alors } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge. (6)}\end{cases}$$

Prop.3: **Domination.** Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ deux séries à termes posifs. Si: $\begin{cases} u_n \underset{\infty}{=} O(\alpha_n)\\ \sum_{n\geq 0}\alpha_n \text{ cv}\end{cases}$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV. (7).

Application: **Règle de d'Alembert** : Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes ds $\mathbb{R}^*_+$. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ admet une limite fine $\ell\in\mathbb{R}_+$. On a:

$$\begin{cases}\text{Si } \ell<1, \text{ alors } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge.}\\ \text{Si } \ell>1, \text{ alors } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge. (8)}\end{cases}$$

Remarque(CAPES): Le test de Cauchy est "plus fin" que celui de D'Alembert.

Exple 2: La série $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$ converge. (d'Alemebert404)

Prop.4: **Equivalence.** Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes réels.

Si $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}, v_n\geq 0\\ u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n\end{cases}$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature. (9)

Exercice: Etudier la nature de la série de terme général $u_n = n^{-\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$ (10)

Prop.5: Soient $n_0\in\mathbb{N}$ et $f:[n_0;+\infty[\to\mathbb{R}_+$ continue par morceaux et décroissante.

La série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge ssi l'application f est intégrable, et dans ce cas on a: $\forall n\geq n_0, \int_{n+1}^{+\infty} f \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} f$.(11)

Cette comparaison porte sur le reste, donc suppose une convergence.

III. Séries de référence (Monier).

A. Séries de Riemann.

Prop.6: Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ fixé, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha>1$ (12)

Application: **Règle "$n^\alpha u_n$".**

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+$.

S'il existe $\alpha\in]1;+\infty[$ tel que $n^\alpha u_n\to 0$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ cv. (13)

B. Séries de Bertrand.

Prop.7: Pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ fixé, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge ssi $\begin{cases}\alpha>1 \text{ ou}\\ \alpha=1 \text{ et } \beta>1\end{cases}$.

Exemple: Etudier la cv de la série de terme gal $(n+1)^{1/n}-n^{1/(n+1)}$ (Monier Ex.3.2.1 p.245, z)

IV. Applications.

A. Développement décimal d'un réel ≥0. (Mon)

Def.2: Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On appelle développement décimal de x toute suite $(d_n)_{n\geq 0}$ telle que:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, d_n \in \mathbb{N} & (1) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq d_n \leq 9 & (2) \\ x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n} & (3) \end{cases}$$

et on écrit alors $x = d_0, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$

Prop.8: Tout élément $x \in \mathbb{R}_+$ admet au moins un développement décimal: $x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n}$, où:

$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, d_n \in \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq d_n \leq 9 \end{cases}$ que l'on écrit $x = d_0, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$

Si x n'est pas décimal, alors il admet un développement décimal unique.
Si x est décimal et non nul, alors il admet exactement deux développements décimaux, du genre:
$x = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{N-1} d_N 0 \ldots 0 \ldots$ et $x = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{N-1} e_N 9..9..$
où $e_N \in \{0, \ldots, 8\}$ et $d_N = e_N + 1$.

On peut généraliser ce principe aux développements en base 2 (dvt dyadique), en base 3 (triadique), en bases 8 et 16 (info.) ...

→A revoir, Cf. 257.

C. Calcul de la fomule de Stirling. (Capes)

Capes p.104, 138-139, ou Sorosina ex.8.11 p.233.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t.dt$.

On montre que $(I_n)_{n\geq 0}$ est une suite positive ↘, et que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ et $u_n = \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

On montre que la série de terme général u_n converge, d'où $a_n \xrightarrow{cv} \ell = \sqrt{2\pi}$.

On en déduit la formule de Stirling:

$$n! \underset{\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}.e^{-n}.n^n$$

→ Cf. 201, 436.

V. Conclusion.

En étudiant la série des opposés, on peut généraliser tout ce cours aux séries à terme général négatif.
Finalement, tout ceci s'applique dans le cadre de séries dont le terme général est de signe constant.
Dans un espace de Banach, les études d'absolue cv de séries sont des études de séries à termes réels positifs.

Une autre application est la moyenne de Césaro →Gourdon p.197-198 (Série??)

VI. Notes.

(1) (Mon) **Généralités sur les séries à termes dans un evn:**

Def: Série ≡ couple $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ tq. $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Def: La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ cv (resp. dv) ssi la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv. (resp. dv).

Prop: CN de convergence: $\sum_{n\geq 0} u_n$ cv $\Rightarrow u_n \to 0$.

Def: Reste d'ordre n ≡ $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Prop: $\sum_{n\geq 0} u_n$ cv $\Rightarrow R_n \to 0$

Rque: Structure de l'ens. des séries cv ds un K-evn:

Prop: Linéarité. $\sum_{n\geq 0} u_n$ cv et $\sum_{n\geq 0} v_n$ cv $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} (u_n + \lambda v_n)$ cv et $\sum_{n\geq 0} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n\geq 0} u_n + \lambda \sum_{n\geq 0} v_n$.

Prop: Décomposit° dans une base. Soit (e_i) une base de E, et $(u_{n,i})_i$ l'ens. des composantes de chaque u_n dans cette base. Ainsi: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{i=1}^{m} u_{n,i} e_i$.

Il vient: $\sum_{n\geq 0} u_n$ cv $\Leftrightarrow \forall i \in [\![1; m]\!], \sum_{i=1}^{m} u_{n,i}$ cv (dans K)

et dans ce cas: $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,i} \right) e_i$

Cor: Dans ℂ, $\sum_{n\geq 0} u_n$ cv $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} \mathrm{Re}(u_n)$ cv et $\sum_{n\geq 0} \mathrm{Im}(u_n)$ cv

$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} \overline{u_n}$ cv.

<u>Prop</u>: Composition par une application linéaire continue: Si f ap. lin. cont. de E ds F, $\sum_{n\geq 0} u_n$ cv (ds E) ⇒ $\sum_{n\geq 0} f(u_n)$ cv (ds F), et $\sum_{n=0}^{+\infty} f(u_n) = f\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$.

Prop: Dans ℝ (relation d'ordre):

Si ∀n∈ℕ, $u_n \leq v_n$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Série géométrique: $\sum_{n\geq 0} r^n$, avec r∈K corps.

Elle converge ssi $|r|<1$, et alors $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

De plus, $S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} r^k = \frac{r^{n+1}}{1-r}$.

(2) Comme on ne change pas la nature d'une série par l'ajout d'un nombre fini de termes, il suffit que ceci soit vrai à partir d'un certain rang pour pouvoir appliquer les résultats de ce cours.

(3) $S_{n+1}-S_n = u_{n+1} \geq 0$, donc (S_n) ↗ . cette suite croissante cv ssi elle est majorée.

(4) Démo: passer aux sommes partielles. On peut demander que $0 \leq u_n \leq v_n$ ne soit vrai qu'à partir d'un certain rang.

(5) Démo: (Attention, cet exple est traité ds Monier avt le § sur les séries ℝ₊). On veut majorer les sommes partielles par un truc dv. Le calcul est assez artificiel: on va s'intéresser au sommes partielles d'indice 2^m, donc on veut $n \geq 2^m$, i.e. en passant au log: $\ln(n) \geq \ln(2^m) = m.\ln(2)$, d'où l'idée de prendre $m \leq \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$, mais comme m∈ℕ, on prend la partie entière: $m = E\left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\right)$. On a bien $n \geq 2^m$, donc:

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k}$, et on décompose "astucieusement" cette série en "blocs se terminant par un dénominateur en puissance de 2":

$$\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+.+\frac{1}{8}\right) + .+ \left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right)$$

On peut alors minorer chaque terme du "bloc" par son dernier terme "en 1/2ᵏ", et il vient:

$$\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + \ldots + 2^{m-1}.\frac{1}{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}$$

Or $m = E\left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\right)$, donc qd n→+∞, m→+∞, et par suite $\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k}$ →+∞. Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k}$, donc d'après la Prop.2, la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

(6)Attention, traité ds Monier en ***exo***: ex.3.2.14. p.247.

→Supposons $\ell < 1$. On pose $\lambda = \frac{\ell+1}{2}$ ∈]0;1[.

Comme λ est le milieu de $[\ell;1]$ et $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$,

∃N∈ℕ* tq. ∀n∈ℕ, $\left(n \geq N \Rightarrow (u_n)^{1/n} \leq \lambda \Rightarrow u_n \leq \lambda^n\right)$.

Comme $\sum_n \lambda^n$ cv en tant que série géométrique avec $\lambda < 1$, d'après la Prop.2, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

→On traite de même le cas $\ell > 1$.

(7) **Notations de Landau:**

Domination O. Lorsque n→∞, ∃un rg à partir duquel |f(n)|≤k.g(n), pour <u>un certain</u> k.

Def°: ∃k>0, ∃N∈ℕ: ∀n>N, f(n)≤k.g(n)

Négligeabilité o: Lorsque n→∞, ∃un rg à partir duquel |f(n)|≤ε.|g(n)|, pour <u>tout</u> ε.

Def°: ∀ε>0, ∃N∈ℕ: ∀n>N, $\left|\frac{f(n)}{g(n)} - 1\right| < \varepsilon$, i.e. $|f(n) - g(n)| < \varepsilon.|g(n)|$

Démonstration de la Pté:

Par def° de u_n dominée par α_n, ∃N∈ℕ, ∃C∈ℝ₊ tq ∀n≥N, $0 \leq u_n \leq C.\alpha_n$. Or $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ cv, donc $C.\sum_{n\geq 0} \alpha_n = \sum_{n\geq 0} C.\alpha_n$ cv, puis o, applique la Prop.2.

(8) *Appliquer la règle de D'Alembert revient à comparer sa série à des séries géométriques. On "essaiera" cette règle lorsque le terme gal contient des Exp ou des puissances ⁿ.*

<u>Lemme</u>: **Comparaison logarithmique.**

Soient (u_n) et (α_n) deux <u>suites</u> à termes réels>0. S'il existe N∈ℕ tq ∀n≥N, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$, alors $u_n = O(\alpha_n)$.

<u>Démo de la règle de D'Alembert</u>:

1) Supposons $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell < 1$. On note $\lambda = \frac{\ell+1}{2}$ ∈]0;1[.

Posons $\alpha_n = \lambda^n$. Puisque 0<λ<1, la série géométrique $\sum_{n\geq 0} \lambda^n$ converge. Or $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell < \lambda$, donc ∃N: ∀n≥N, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$. D'après le Lemme, $u_n = O(\alpha_n)$, donc d'après la Prop.3, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

2) Supposons $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell > 1$. ∃N∈ℕ tq ∀n≥N, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Ainsi, (u_n) est $\nearrow$. On a alors $\forall n\geq N$, $u_n\geq u_N>0$, donc $u_n \not\to 0$, et la série diverge grossièrement.

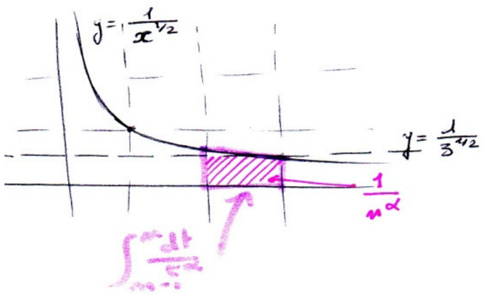
(9)→Montrons d'abord que les u_n sont ≥ 0 à partir d'un certain rg. Puisque $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n\geq N$, $|u_n - v_n| \leq v_n$ (Def°, pour $\varepsilon=1$). Donc $-v_n \leq u_n - v_n \leq v_n$, d'où $0 \leq u_n \leq 2v_n$, et en particulier $u_n \geq 0$.
→Montrons le résultat sur la cv.
$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n = O\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right)$ et $\sum_{n\geq 0} v_n = O\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$, on conclut grâce à la Prop.3.

(10) Monier ex. 3.2.1g) $u_n = n^{-\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\ln(n)} \sim \frac{1}{n}$
donc la série dv comme la série harmonique.

(11) Monier p.267 (il faut aller le chercher!).

(12) Monier p.236.
Si $\alpha\leq 0$, divergence grossière.
Si $\alpha=1$, dv car série harmonique.
Si $0<\alpha<1$, dv car minorée par $1/n$ qui diverge.
Si $\alpha>1$, soit $N\geq 2$. On a, $\forall n\geq 2$,

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$, car:



d'où:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{N^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{\alpha-1}$$

Ainsi, par cv de ses sommes partielles, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

(13) Il existe un rg N à partir duquel $0 \leq n^\alpha u_n \leq 1$, donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$, or cette série cv d'après ce qui précède, d'où le cv de $\sum_{n\geq 0} u_n$.